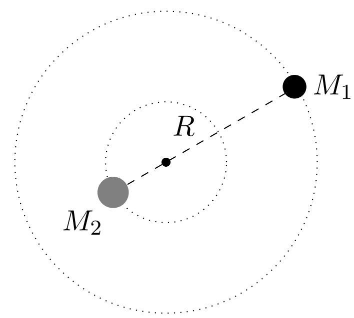
FS-1112: SEGUNDO PARCIAL

Universidad Simón Bolívar
Enero-Marzo 2017
Sartenejas, 01 de marzo de 2017

Nombre:____. Carnet:______________________. Sección:________.

Parte I: Selección simple (14 puntos). A continuación se presentan 7 planteamientos de selección simple con un valor de 2 puntos cada uno. Marque con una X la opción que considere correcta de cada planteamiento. Justifique cada una de las respuestas que haya escogido. Una opción marcada sin justificación será considerada como incorrecta. Cada planteamiento tiene una única respuesta correcta. Si marca más de una opción por planteamiento, será considerado como respuesta incorrecta. No hay factor de corrección.

Dos planetas M_1 y $M_2 = 4M_1$, orbitan, uno alrededor del otro, en trayectorias circulares bajo la acción de su atracción gravitatoria. Es conocido que el periodo de revolución de M_2 es T_2. La distancia que separa al centro de ambos planetas vale R. El sistema se encuentra completamente aislado y el centro de masa del mismo se encuentra en reposo. Ver figura adjunta. Utilice esta información para responder los siguientes dos planteamientos:

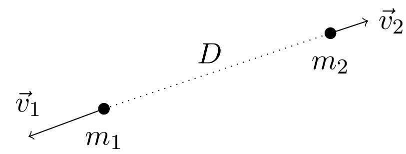


1. (2 pts.) El periodo de rotación de M_1 en su órbita es:
   (X) T_2
   ( ) $4T_2$
   ( ) $\frac{4}{5}T_2$
   ( ) $\frac{5}{4}T_2$
   ( ) Ninguna de las anteriores.

2. (2 pts.) Suponga que T_1 es el periodo de la órbita de M_1. La rapidez de M_1 es:
   ( ) $4\pi \frac{R}{T_1}$
   ( ) $\frac{\pi}{4} \frac{R}{T_1}$
   (X) $\frac{8\pi}{5} \frac{R}{T_1}$
   ( ) $\frac{\pi}{5} \frac{R}{T_1}$
   ( ) Ninguna de las anteriores.

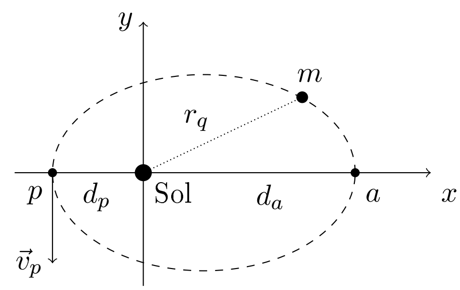
3. (2 pts.) ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es cierta?
   ( ) Si el centro de masa de un rígido no se mueve respecto a tierra es porque el rígido se encuentra estático.
   ( ) Para un rígido que se encuentra estático, el centro de masa no se mueve en ningún referencial.
   ( ) $\sum \vec{\tau}_{\text{ext}} = \vec{0}$ y $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$ garantizan que un rígido se encuentre estático.
   ( ) Un rígido que se encuentre estático tiene velocidad angular nula en todos los sistemas de referencia.
   (X) Todas las anteriores son falsas.

4. (2 pts.) Dos partículas de masa m_1 y $m_2 = 5m_1$ se encuentran inicialmente a una distancia D, alejándose con una rapidez relativa $v_o = \sqrt{4\frac{Gm_1}{D}}$. Vea la figura adjunta. ¿Qué rapidez relativa tenían cuando se encontraban alejadas a una distancia $\frac{1}{2}D$?



( ) 0
( ) $\sqrt{\frac{3}{4}\frac{Gm_1}{D}}$
(X) $4\sqrt{\frac{Gm_1}{D}}$
( ) $2\sqrt{\frac{Gm_1}{D}}$
( ) Ninguna de las anteriores.

Un cometa de masa m orbita alrededor del Sol, masa $M_S >> m$, en una trayectoria elíptica cuya relación entre las distancias del afelio (a) y el perihelio (p) medidas desde el Sol es $d_a = 5d_p$. La velocidad del cometa en el perihelio $\vec{v}_p$ es conocida. Vea la figura. Con esta información, responda los dos siguientes planteamientos:



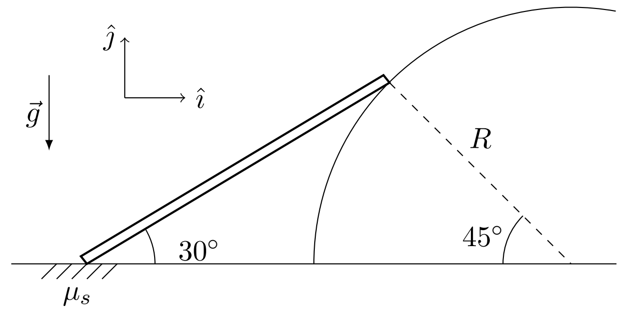
5. (2 pts.) La velocidad del cometa en el afelio es:
( ) $-\frac{5}{4}\,\vec{v}_p$
(X) $-\frac{1}{5}\,\vec{v}_p$
( ) $-4\,\vec{v}_p$
( ) $\frac{4}{5}\,\vec{v}_p$
( ) Ninguna de las anteriores.

6. (2 pts.) En la figura se muestra a m cuando se encuentra a una distancia $r_q = 4d_p$. La rapidez de m cuando se encuentra en dicho punto es:
( ) $\sqrt{v_p^2 - \frac{1}{2}\frac{GM_s}{d_p}}$
( ) $\sqrt{v_p^2 + \frac{1}{2}\frac{GM_s}{d_p}}$
( ) $\frac{1}{4}\,v_p$
(X) $\sqrt{v_p^2 - \frac{3}{2}\frac{GM_s}{d_p}}$
( ) Ninguna de las anteriores.

7. (2 pts.) Dos satélites artificiales de masas m_1 y $m_2 = 6m_1$, rotan alrededor de la Tierra en órbitas circulares con radios R_1 y $R_2 = 16R_1$, respectivamente. La relación entre la rapidez angular ω_1 de m_1 y la de la rapidez angular ω_2 de m_2 en sus órbitas es:
( ) $\omega_1 = 4\,\omega_2$
( ) $\omega_1 = \frac{1}{8}\,\omega_2$
(X) $\omega_1 = 64\,\omega_2$
( ) $\omega_1 = 8\,\omega_2$
( ) Ninguna de las anteriores.

Parte II: Problema de desarrollo (11 puntos). A continuación se presenta un problema que debe desarrollar. Justifique cada argumento siendo coherente, claro, conciso, ordenado y escribiendo con letra legible.

8. Una barra de masa M y longitud L se encuentra inclinada a 30° sobre la horizontal, con el extremo inferior apoyado sobre el suelo y el extremo superior apoyado sobre la periferia de medio cilindro de radio R. Observe la figura adjunta. El sistema se mantiene completamente estático. No existe fricción entre la superficie del cilindro y la barra, pero sí entre el suelo y la barra; el coeficiente de roce asociado es $\mu_s = \frac{3}{4}$. Calcule:



(a) (4 pts.) El módulo de la fuerza que realiza el cilindro sobre la barra.

(b) (3 pts.) La fuerza normal que ejerce el suelo sobre la barra.

(c) (4 pts.) La fricción $\vec{f_r}$ ejercida por el suelo sobre la barra.

Respuestas:

$$N_c = \frac{Mg}{2\sqrt{2}} \qquad N_p = \frac{3}{4}Mg \qquad \vec{f_r} = \frac{1}{4}Mg\hat{\imath}$$

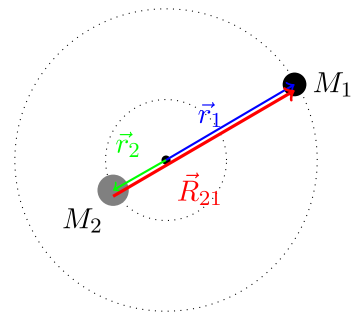
Explicaciones

1. Obligatoriamente ambos planetas deben barrer el mismo ángulo en la misma cantidad de tiempo; es decir, deben tener iguales ω, pues de lo contrario ya el centro de masa no estaría en la línea que los une, contradiciendo el hecho de que nos dicen que no hay fuerzas externas y que el centro de masa está en reposo. Como $T = \frac{2\pi}{\omega}$ y $\omega_1 = \omega_2$, $\boxed{T_1 = T_2}$.

---

2. Recordemos que $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{\frac{v}{r}} \Rightarrow v = \dfrac{2\pi r}{T}$. Como depende de r, debemos hallar el radio de órbita del planeta.

   Si consideramos a $\vec{R}_{21}$ como el vector que va de M_2 a M_1, de magnitud R, tenemos que $\vec{r}_2 = \vec{r}_1 - \vec{R}_{21}$ (ver figura a la derecha).



   Además, tomando el centro de masa como el origen, tenemos que

$$\vec{r}_{CM} = \vec{0} = \frac{M_1\vec{r}_1 + M_2\vec{r}_2}{M_1 + M_2} \Rightarrow M_2\vec{r}_2 = -M_1\vec{r}_1 \Rightarrow 4M_1(\vec{r}_1 - \vec{R}_{21}) = -M_1\vec{r}_1$$
$$\Rightarrow \vec{r}_1 = \frac{4}{5}\vec{R}_{21}$$

   Como $||\vec{R}_{21}|| = R$, entonces $||\vec{r}_1|| = \frac{4}{5}||\vec{R}_{21}|| = \frac{4}{5}R$. Dado que ya tenemos el radio de órbita, podemos hallar la rapidez:

$$v_1 = \frac{2\pi r_1}{T_1} = \frac{2\pi\frac{4}{5}R}{T_1} \Longrightarrow \boxed{v_1 = \frac{8\pi}{5}\frac{R}{T_1}}$$

---

3. Sabemos que un rígido está estático si $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ y $\sum \vec{\tau}_{ext} = \vec{0}$, $\vec{v} = 0$ y $\vec{\omega} = 0$, donde $\vec{v}$,$\vec{\omega}$ están medidos **respecto a tierra**.

   Que $\vec{v}_{CM} = 0$ no implica que todo el rígido esté estático (por ejemplo, un disco fijo a un eje que rote con un $\vec{\omega}$). Adicionalmente, que las fuerzas y torques externos no sean cero tampoco da certeza de que un cuerpo esté en equilibrio estático (son necesarias dos condiciones más: $\vec{v} = 0$ y $\vec{\omega} = 0$ respecto a tierra).

   Además, si cambiamos el referencial a un punto que se esté moviendo, un cuerpo puede tener un $\vec{\omega}'$ o una $\vec{v}'$, aún estando estático. Como existen infinitos referenciales, con infinitas posibles velocidades, es imposible que un cuerpo no tenga una $\vec{v}'$ en alguno de ellos.

   Por lo tanto, la única afirmación correcta es que $\boxed{\text{todas las anteriores son falsas}}$.

---

4. Como se trabaja con la rapidez relativa de dos partículas que ejercen fuerzas centrales la una sobre la otra, podemos usar la masa reducida, $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$, para simplificar el problema. La energía se conserva, entonces:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \Longrightarrow \frac{1}{2}\mu v_o^2 - G\frac{m_1 m_2}{D} = \frac{1}{2}\mu v_f^2 - G\frac{m_1 m_2}{\frac{1}{2}D} \Longrightarrow \boxed{v_f = 4\sqrt{\frac{Gm_1}{D}}}$$

---

5. El momento angular se conserva, por lo tanto:

$$L_i = L_f \Longrightarrow d_p m v_p = 5 d_p m v_a \Longrightarrow v_a = \frac{1}{5}v_p$$

   Sin embargo, eso nos permite hallar la magnitud solamente. Como $\vec{v}_a$ apunta en la dirección opuesta a $\vec{v}_p$, tenemos que $\boxed{\vec{v}_a = -\frac{1}{5}\vec{v}_p}$.

6. La energía se conserva, por ende:

$$K_i + U_i = K_f + U_f \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_p^2 - G\frac{mM_S}{d_p} = \frac{1}{2}mv_f^2 - G\frac{mM_S}{4d_p} \Longrightarrow \boxed{v_q = \sqrt{v_p^2 - \frac{3}{2}\frac{GM_S}{d_p}}}$$

---

7. Hallamos una expresión para la rapidez angular usando la segunda ley de Newton:

$$G\frac{mM_t}{R^2} = m\omega^2 R \Longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{GM_t}{R^3}}$$

Entonces las dos ω son $\omega_1 = \sqrt{\frac{GM_t}{R_1^3}}$ y $\omega_2 = \frac{1}{16}\sqrt{\frac{GM_t}{16R_1^3}}$. Dividiendo ambas tenemos:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\sqrt{\frac{GM_t}{R_1^3}}}{\frac{1}{16}\sqrt{\frac{GM_t}{16R_1^3}}} \Longrightarrow \boxed{\omega_1 = 64\omega_2}$$

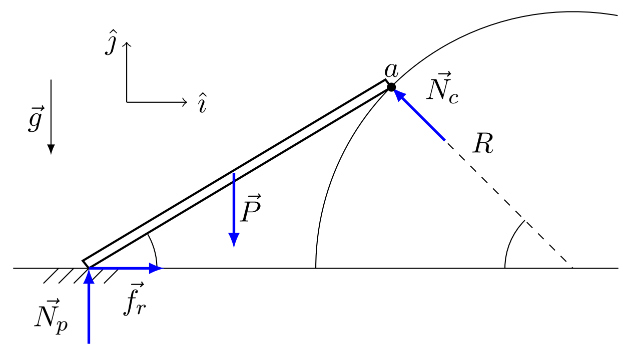
---

8. A la derecha está el diagrama de fuerzas de la figura. Asumiremos que la dirección de la fricción es hacia la derecha, pero las ecuaciones nos dirán si es en esa o en la otra dirección. Las ecuaciones de equilibrio, tomando el torque respecto al punto a, son:

$$\sum F_y = N_p - Mg + N_c \operatorname{sen} 45 = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_x = f_r - N_c \cos 45 = 0 \tag{2}$$

$$\sum \tau^a = N_p L \cos 45 - Mg\frac{L}{2}\cos 45 - f_r L \operatorname{sen} 45 = 0 \tag{3}$$



(a) De (2) tenemos que :

$$f_r = N_c \cos 45 = \frac{\sqrt{2}}{2}N_c \tag{4}$$

Simplificando (3) y substituyendo f_r obtenemos:

$$N_p - \frac{1}{2}Mg - \frac{\sqrt{2}}{2}N_c = 0 \tag{5}$$

Restando (1) a (4), resulta:

$$N_p - \frac{1}{2}Mg - \frac{\sqrt{2}}{2}N_c - N_p + Mg - \frac{\sqrt{2}}{2}N_c = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{N_c = \frac{Mg}{2\sqrt{2}}}$$

(b) Sustituyendo N_c en (1), tenemos:

$$N_p - Mg + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Mg}{2\sqrt{2}} = 0$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{N_p = \frac{3}{4}Mg}$$

(c) Sustituyendo N_c en (4):

$$\boxed{f_r = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{Mg}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{4}Mg}$$

Como la fricción es positiva, entonces sí apunta hacia la derecha, como asumimos inicialmente, es decir, $\vec{f_r} = f_r\hat{\imath}$.

Este parcial fue suministrado por el Prof. Kevin Ng y resuelto por Jean F. Gómez (15-10581) con asistencia del Prof. Ng para GUIAS USB

gecousb.com.ve
Twitter: @gecousb
Instagram: gecousb

Se agradece notificar cualquier error de tipeo o en las respuestas y qué debería decir a la dirección gecousb@gmail.com